ΠΡΟΤΕΙΟΝ φροντιστήριο

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ/ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια: Κατερίνα Καρτσώνη, Μαθηματικός

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ /ΟΡΙΟ / ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f:\Re \to \Re$ μια συνάρτηση συνεχής στο x=1 για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{x^2-x}=\dfrac{1}{2}$

α) Να δείξετε ότι f(1)=1

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(1,f(1))

2. Έστω $f:\Re \to \Re$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει: f(0)=0 και $|f(x)-f(\psi)| \le |x-\psi|$ για κάθε x,ψ $\in \Re$.

A) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής στο $\Re$.

ii) η g(x)=f(x)+3x-1 είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

iii) η εξίσωση f(x)+3x=1 έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

B) Να δείξετε ότι :

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+3f(x)}{x^2+|f(x)|}=2$

3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$ για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει: $4x \le f(x) \le x^2+4$, $x \in \Re$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=2$.

β) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\Re$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0>2$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\dfrac{2013}{x_0}$.

4. Έστω μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [0,1] με f(0)= 0 και f(1)= 1.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι επιπλέον παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,1), να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.